Corrigés des exercices

1. Développer, factoriser

Exercice 1.1.

$A = (1+2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2 = 4x^2 + 4x + 1$

$B = (2-3x)(2+3x) = 2^2 - (3x)^2 = -9x^2 + 4$

$C = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

Exercice 1.2.

a) $17 - 3(x+3) = 17 - 3x - 9 = -3x + 8$

b) $(3x-2)(2x+5) = 6x^2 + 11x - 10$

c) $(x+8)^2 - 5 = x^2 + 16x + 59$

d) $(2x-1)(4x-5) = 8x^2 - 14x + 5$

Exercice 1.3.

a) $-3x^2 + 6x(x-2) = -3x^2 + 6x^2 - 12x = 3x^2 - 12x$
b) $5(x+3)(x+1) = 5(x^2 + x + 3x + 3) = 5x^2 + 20x + 15$
c) $(2x-1)^2 - x^2 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 = 3x^2 - 4x + 1$
d) $(4x+1)(2x-1) = 8x^2 - 4x + 2x - 1 = 8x^2 - 2x - 1$

Exercice 1.4.

$\mathrm{A} = 5x - (3x-5)^2 = 5x - (9x^2 - 30x + 25) = -9x^2 + 35x - 25$
$\mathrm{B} = (3x+6)(5x-2) = 15x^2 + 24x - 12$
$\mathrm{C} = 5x - (3x+5)^2 = 5x - (9x^2 + 30x + 25) = -9x^2 - 25x - 25$
$\mathrm{D} = (3x+6)(5x-2) = 15x^2 + 24x - 12$

Exercice 1.5.

$A = (x-3)(2x+5) - 2(2x+5)$
$A = (2x+5)[x-3-2]$
$A = (2x+5)(x-5)$

$B = (2x+1)(x-3) - (2x+1)$
$B = (2x+1)[x-3-1]$
$B = (2x+1)(x-4)$

$D = (2x+3)(1-x) - (4x+6)$
$D = (2x+3)(1-x) - 2(2x+3)$
$D = (2x+3)[1-x-2]$
$D = (2x+3)(-x-1)$

$E = (1+2x)^2 - (2-x)^2$
$E = [(1+2x)+(2-x)][(1+2x)-(2-x)]$
$E = (3+x)(-1+3x)$

$F = 4x^2 - 12x + 9$
$F = (2x-3)^2$

$C = x^2 + 10x + 25$
$C = (x+5)^2$

Exercice 1.6. a) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

b) $9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$

c) $(x+5)^2 - 16 = \big((x+5)-4\big)\big((x+5)+4\big) = (x+1)(x+9)$

d) $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$

e) $16 - x^2 = (4-x)(4+x)$

Exercice 1.7. a) $4(x-1)^2 - 9 = (2(x-1)-3)(2(x-1)+3) = (2x-5)(2x+1)$

b) $4 - 12x + 9x^2 = (3x-2)^2$ c) $9 - 4x^2 = (3-2x)(3+2x)$

d) $(x+2)^2 - 1 = \big((x+2)-1\big)\big((x+2)+1\big) = (x+1)(x+3)$

Exercice 1.8

$A = (2x+3)(5x-1)-3(2x+3) = (2x+3)(5x-1-3) = (2x+3)(5x-4)$

$B = (x-3)(2x+5)-(2x-5)(2x+5) = (2x+5)(-x+2)$

$C = 4x^2+4x+1+(2x+1)(3x-5)$
$C = (2x+1)^2+(2x+1)(3x-5) = (2x+1)(5x-4)$

$D = (3x-1)(2x+5)-(3x-1) = (3x-1)\big((2x+5)-1\big) = (3x-1)(2x+4)$

2. Quotients et fractions

Exercice 2.1

$$a = \frac{3}{4}-\frac{2}{3}\div\frac{3}{2} = \frac{3}{4}-\frac{4}{9} = \frac{27-16}{36} = \frac{11}{36} \qquad b = \frac{3}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{4}-1 = -\frac{1}{4}$$

$$c = \frac{3}{\frac{1}{2}}\times\frac{3}{2} = 9 \qquad d = 5\times\frac{1-\frac{1}{2}}{3} =$$

Exercice 2.2

$$a = \frac{2}{3}+\frac{4}{7} = \frac{14+12}{21} = \frac{26}{21} \qquad b = \frac{5}{13}-2 = \frac{-21}{13} \qquad c = \frac{23}{26}-\frac{12}{39} = \frac{23}{26}-\frac{8}{26} = \frac{15}{26}$$

$$d = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{21}{16}} = \frac{15}{4}\times\frac{16}{21} = \frac{3\times5\times4\times4}{4\times3\times7} = \frac{5\times4}{7} = \frac{20}{7} \qquad e = \frac{4}{35}\times8 = \frac{32}{35}$$

$$f = \frac{-21}{35}\div\frac{3}{10} = \frac{-21}{35}\times\frac{10}{3} = -\frac{7\times3\times5\times2}{7\times5\times3} = -2$$

Exercice 2.3

$$a = \frac{42}{75}-\left(-\frac{22}{30}\right) = \frac{14}{25}+\frac{11}{15} = \frac{42+55}{75} = \frac{97}{75} \qquad b = -\frac{1}{25}-8 = \frac{-1-200}{25} = -\frac{201}{25}$$

$$c = \frac{26}{77}\div\frac{39}{21} = \frac{26}{77}\times\frac{21}{39} = \frac{13\times2\times3\times7}{11\times7\times3\times13} = \frac{2}{11} \qquad d = \frac{5}{4}-\frac{7}{4}\times\frac{7}{8} = \frac{40}{32}-\frac{49}{32} = -\frac{9}{32}$$

Exercice 2.4 $A:\ \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $\quad B:\ \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ $\quad C:\ \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$A = 1+\frac{4}{2x+1} = \frac{2x+5}{2x+1} \qquad B = 2-\frac{3}{1-3x} = \frac{2-6x-3}{1-3x} = \frac{-6x-1}{1-3x}$$

$$C = \frac{1}{2}-\frac{3x+1}{x+1} = \frac{x+1-6x-2}{2(x+1)} = \frac{-5x-1}{2(x+1)}$$

Exercice 2.5 **5** $A:\ \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $\quad B:\ \mathbb{R}\backslash\{1\}$ $\quad C:\ \mathbb{R}\backslash\left\{0\,;\,\frac{3}{2}\right\}$

$$A = 1+\frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1} \qquad B = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$$C = \frac{1}{3x}-\frac{1+x}{2x-3} = \frac{2x-3-3x(1+x)}{3x(2x-3)} = \frac{-3x^2-x-3}{3x(2x-3)}$$

3. Puissances

Exercice 3.1.

$a = 31000 \times 10^{-4} = 3{,}1$ $\quad b = 7{,}2 \times 10^{3} = 7200$

$c = 0{,}5 \times 10^{-2} = 0{,}005$ $\quad d = 5 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^{9} = 10 \times 10^{2} = 1000$

Exercice 3.2.

$$a = \frac{3^2 \times 7}{7^2 \times 3} = \frac{3}{7} \qquad b = \frac{9 \times 10^2}{3 \times 5^3} = \frac{3 \times 2^2}{5} = \frac{12}{5} \qquad c = \frac{2^4 \times 8^4}{2 \times 16^3} = \frac{2^4 \times 8^4}{2^4 \times 8^3} = 8$$

$$d = \frac{3^5 \times 8^7 \times 6^3}{3^6 \times 12^3 \times 8^4 \times 4^3} = \frac{8^3}{3 \times \underbrace{2^3 \times 4^3}_{8^3}} = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.3.

$$a = 5^2 \times 5^{-3} = 5^{-1} \qquad b = \frac{5^8}{5^{-2}} = 5^{10} \qquad c = (5^2)^{-2} = 5^{-4}$$

$$d = 3 \times 5^4 + 2 \times 5^4 = 5 \times 5^4 = 5^5 \qquad e = \frac{5^{-3} \times 5^4}{5 \times 25^3} = \frac{1}{25^3} = \frac{1}{5^6} = 5^{-6}$$

Exercice 3.4

$$a = 25 \times 100 \times 5^{-3} = 5^2 \times 5^2 \times 2^2 \times 5^{-3} = 2^2 \times 5 \qquad b = \frac{125 \times 12}{30} = \frac{5^3 \times 2^2 \times 3}{2 \times 3 \times 5} = 2 \times 5^2$$

$$c = 125^2 \times 100^3 = 5^6 \times 5^6 \times 2^6 = 2^6 \times 5^{12}$$

$$d = 0{,}002 \times 0{,}0025 = 2 \times 10^{-3} \times 5^2 \times 10^{-4} = 2 \times 5^2 \times 10^{-7} = 2 \times 5^2 \times 2^{-7} \times 5^{-7} = 2^{-6} \times 5^{-5}$$

$$e = \frac{49}{35 \times 14} = \frac{7^2}{5 \times 7 \times 7 \times 2} = 5^{-1} \times 2^{-1}$$

Exercice 3.5

$$a = 49 \times 21 \times 27 = 7^2 \times 3 \times 7 \times 3^3 = 3^4 \times 7^3 \qquad b = \frac{343 \times 15}{35} = \frac{7^3 \times 3 \times 5}{7 \times 5} = 3 \times 7^2$$

$$c = 49^5 \times 21^3 = 7^{10} \times 3^3 \times 7^3 = 3^3 \times 7^{13} \qquad d = 7000 \times 0{,}049 = 7 \times 10^3 \times 7^2 \times 10^{-3} = 7^3$$

4. Racines carrées

Exercice 4.1

$a = \sqrt{300} - \sqrt{12} - \sqrt{27}$

$a = \sqrt{10^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3}$

$a = \sqrt{10^2} \times \sqrt{3} - \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$

$a = 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$b = \sqrt{125} - 15\sqrt{5} + \sqrt{245}$

$b = \sqrt{5^2 \times 5} - 15\sqrt{5} + \sqrt{7^2 \times 5}$

$b = \sqrt{5^2} \times \sqrt{5} - 15\sqrt{5} + \sqrt{7^2} \times \sqrt{5}$

$b = 5\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$

$b = -3\sqrt{5}$

$c = \sqrt{14} \times \sqrt{21} \times \sqrt{6}$

$c = \sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$d = \sqrt{63} + 5\sqrt{7} - \sqrt{700}$

$d = \sqrt{3^2 \times 7} + 5\sqrt{7} - \sqrt{10^2 \times 7}$

$c = (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{7})^2$
$c = 2 \times 3 \times 7$
$c = 42$

$d = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - \sqrt{10^2} \times \sqrt{7}$
$d = 3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 10\sqrt{7}$
$d = -2\sqrt{7}$

Exercice 4.2

$A = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$
$A = 2 \times 3$
$A = 6$

$B = 4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}$
$B = 12 \times 5$
$B = 60$

$C = (-\sqrt{5})^2$
$C = 5$

$D = (3\sqrt{2})^2$
$D = 9 \times 2$
$D = 18$

Exercice 4.3

$A + B = 8 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 1$
$A + B = 7 + 4\sqrt{2}$

$A - B = 8 + \sqrt{2} - (3\sqrt{2} - 1)$
$A - B = 8 + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1$
$A - B = 9 - 2\sqrt{2}$

$A \times B = (8 + \sqrt{2}) \times (3\sqrt{2} - 1)$
$A \times B = 24\sqrt{2} - 8 + 6 - \sqrt{2}$
$A \times B = -2 + 23\sqrt{2}$

$B^2 = (3\sqrt{2} - 1)^2$
$B^2 = 18 - 6\sqrt{2} + 1$
$B^2 = 19 - 6\sqrt{2}$

Exercice 4.4

$a = \sqrt{3}\sqrt{12}$ $a = \sqrt{36}$ $a = 6$	$b = \sqrt{5}\sqrt{20}$ $b = \sqrt{100}$ $b = 10$	$c = 2\sqrt{3}\sqrt{12}$ $c = 2\sqrt{36}$ $c = 2 \times 6$ $c = 12$	$d = \sqrt{7^3}$ $d = \sqrt{7^2 \times 7}$ $d = \sqrt{7^2} \times \sqrt{7}$ $d = 7\sqrt{7}$	$e = \sqrt{200}$ $e = \sqrt{100} \times \sqrt{2}$ $e = 10\sqrt{2}$	$f = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}}$ $f = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{3} \times \sqrt{9}}$ $f = \frac{\sqrt{7}}{3}$	$g = \sqrt{\frac{25}{100}}$ $g = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}}$ $g = \frac{5}{10}$ $g = \frac{1}{2}$

Exercice 4.5

$a = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$
$a = -4\sqrt{7}$

$b = 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{180} + 17\sqrt{5}$
$b = 26\sqrt{5} - \sqrt{36} \times \sqrt{5}$
$b = 26\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$
$b = 20\sqrt{5}$

$c = \sqrt{18} - \sqrt{8} - \sqrt{2}$
$c = \sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{4} \times \sqrt{2} - \sqrt{2}$
$c = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$
$c = 0$

$d = \sqrt{180} - \sqrt{20} + \sqrt{125}$
$d = \sqrt{36} \times \sqrt{5} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{25} \times \sqrt{5}$
$d = 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$
$d = 9\sqrt{5}$

5. Équations produit

Exercice 5.1

a) $2x^2 = 0 \quad S = \{0\}$

b) $x^2 - 3 = 0 \quad S = \{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$

c) $x(x+3) = 0 \quad S = \{-3\,;0\}$

d) $-4x(x^2+1) = 0 \quad S = \{0\}$

Exercice 5.2

a) $(x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$
$\boxed{S = \{-1; 3\}}$

b)
$(2x+1)(1-x)(3+x) = 0$

c) $3(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$
$\boxed{S = \{-1; 1\}}$

d) $(x+1)(2x-7) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 7/2$

$\Leftrightarrow x = -1/2$ ou $x = 1$ ou $x = -3$

$$\boxed{S = \{-3\,;\,-\frac{1}{2};1\}}$$

$$\boxed{S = \left\{-1;\frac{7}{2}\right\}}$$

Exercice 5.3

a) $(x+3)(1+2x) - 2(x+3) = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)(2x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x+3 = 0$ ou $2x-1 = 0$
$S = \left\{-3;\frac{1}{2}\right\}$

b) $(x+1)(2x+3) = (x+1)(2+3x)$
$\Leftrightarrow (x+1)(-x+1) = 0$
$\Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $-x+1 = 0$
$S = \{-1;1\}$

c) $(1+x)^2 - (3-2x)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (1+x-3+2x)(1+x+3-2x) = 0$
$\Leftrightarrow 3x-2 = 0$ ou $-x+4 = 0$
$S = \left\{\frac{2}{3};4\right\}$

d) $x(x+1) = x(2x+5)$
$\Leftrightarrow x(-x-4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $-x-4 = 0$
$S = \{-4;0\}$

Exercice 5.4

a) $(x-2)(2x+3) + (x-2)(3x+4) = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(5x+7) = 0$
$\Leftrightarrow x-2 = 0$ ou $5x+7 = 0$
$S = \{-1{,}4\,;2\}$

b) $(2x-3)(3x+4) - 3(2x-3)(2x+7) = 0$
$\Leftrightarrow (2x-3)(-3x-17) = 0$
$\Leftrightarrow 2x-3 = 0$ ou $-3x-17 = 0$
$S = \left\{-\frac{17}{3}\,;\frac{3}{2}\right\}$

c) $(x-5)^2 = (x-5)(3x+9)$
$\Leftrightarrow (x-5)(-2x-14) = 0$
$\Leftrightarrow x-5 = 0$ ou $-2x-14 = 0$
$S = \{-7\,;5\}$

d) $x^2 - 9 = (x+3)(2x+8)$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) - (x+3)(2x+8) = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)(-x-11) = 0$

$S = \{-11\,;-3\}$

Exercice 5.4 : a. $S = \{5;-1\}$ b. $S = \{0;6\}$

c. $(2x+5)^2 = (3-x)^2 \Leftrightarrow (2x+5)^2 - (3-x)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x+2)(x+8) = 0$ $S = \left\{-8;-\frac{2}{3}\right\}$

Exercice 5.5

d. $(4x-3)(x+1) + x(4x-3) = 0 \Leftrightarrow (4x-3)(2x+1) = 0$ $S = \left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right\}$

e. $30x^2 = 12x \Leftrightarrow 30x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 6x(5x-2) = 0$ $S = \left\{0\,;\frac{2}{5}\right\}$

f. $4(x-2)^2 + 4(x-2) = -1 \Leftrightarrow 4(x-2)^2 + 4(x-2) + 1 = 0 \Leftrightarrow (2(x-2)+1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0$ $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

6.Inéquations, tableaux de signes

Exercice 6.1

a) $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$ $S = \left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

b) $-4x-6 < 0 \Leftrightarrow -4x < 6 \Leftrightarrow x > -\frac{6}{4}$ $S = \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$

c) $-x+\frac{5}{6} > 0 \Leftrightarrow -x > -\frac{5}{6} \Leftrightarrow x < \frac{5}{6}$ $S = \left]-\infty;\frac{5}{6}\right[$

Exercice 6.2

a) $f(x) = (1+x)(2-3x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $f(x) = (1+x)(1-x)(3+2x)$

x	$-\infty$		$-1{,}5$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$3+2x$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $f(x) = -2(2x+1)(1-4x)$

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$0{,}25$		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 6.3

a) $f(x) = \frac{1+4x}{1-x}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$1+4x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

b) $f(x) = \frac{-2}{x+5}$

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	

c) $f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(1-2x)}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Exercice 6.4 : Dans chaque cas, faire un tableau de signe pour résoudre l'inéquation.

a) $S = \left]-\frac{1}{2};1\right[$ b) $S = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup [3;+\infty[$ c) $S = \left]-\frac{1}{3};1\right[$

Exercice 6.5 : Dans chaque cas, faire un tableau de signe pour résoudre l'inéquation.
Dans les tableaux, penser à mettre une double-barre sous les valeurs interdites.

a) $S = \left[-\frac{1}{4};2\right[$ b) $S = \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ c) 0 $S = \left]-1;\frac{1}{5}\right] \cup]1;+\infty[$

7. Vecteurs : norme, distance entre deux points, déterminant

Exercice 7.1

a) Notons $M(x;y)$, on a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2+1 \\ -2-5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux si et seulement si les deux vecteurs ont les même coordonnées.

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-1 \\ y-2=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$$

On en déduit donc que $M(2;-5)$.

Notons $N(x;y)$ on a alors $\overrightarrow{BN}(x+1;y-5)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux si et seulement si les deux vecteurs ont les même coordonnées.

$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-\dfrac{5}{3} \\ y-5=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{11}{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que $N\left(-\frac{8}{3};\frac{11}{3}\right)$.

Notons $P(x;y)$ on a alors $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix} 3-x \\ 2-y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} -1-x \\ 5-y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PC}\begin{pmatrix} -2-x \\ -2-y \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\begin{pmatrix} -3x \\ -3y+5 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ est le vecteur nul si et seulement si ses coordonnées sont nulles.

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=0 \\ -3y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que $P\left(0\,;\frac{5}{3}\right)$.On en déduit donc que $P\left(0\,;\frac{5}{3}\right)$.

b) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$ donc le quadrilatère $AMCB$ est un parallélogramme.

Exercice 7.2

a. $I\left(\frac{3+16}{2};\frac{4+9}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{19}{2};\frac{13}{2}\right)$.

b. $\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$

$\vec{u}+3\vec{v}\begin{pmatrix} 3+3\times(-1) \\ 2+3\times 5 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u}+3\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 17 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}+3\vec{v}\|=17$.

c. Notons $C(x;y)$ dans ce cas $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x-16 \\ y-9 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BC}=\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x-16=3 \\ y-9=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=11 \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de C sont $C(19;11)$.

d. $Det(\vec{u},\vec{v})=3\times 5-2\times(-1)=17\neq 0$
donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 7.3

a. $\overrightarrow{AK}\binom{3}{2}$ donc $AK=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

b. Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+7}{2};\ \frac{1+5}{2}\right)$ c'est-à-dire $(4\ ;3)$, donc K est le milieu de $[AC]$.

c. K est le milieu de $[AC]$ donc $CK=AK$.

De plus, $BK=\sqrt{(2-4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$ donc $BK=AK$.

Finalement, $CK=AK$ et $BK=AK$ donc $AK=BK=CK$
donc le point K est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 7.4

On a : $\overrightarrow{AB}\binom{2}{6}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{5}{15}$

$det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=2\times 15-5\times 6=30-30=0$

Comme $det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 7.5

a. $\overrightarrow{AB}\binom{5}{11}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{7}{9}$ donc $\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{BC}\right)=5\times 9-11\times 7=-32\neq 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires

donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Notons $D(x\ ;13)$, on a : $\overrightarrow{AD}\binom{x-3}{17}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{5}{11}$.

D appartient à la droite (AB) $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow 11x-33-85=0$$
$$\Leftrightarrow 11x=118 \Leftrightarrow x=\frac{118}{11}$$

On en déduit que D a pour abscisse $\dfrac{118}{11}$.

8. Équation réduite de droites, point d'intersection de deux droites

Dans tous les exercices suivants, le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 8.1 : Soient les points $A(1;4)$, $B(3;7)$, $C(-4;2)$ et $D(0\ ;\ -3)$.

a. $M(x;y)\in(AB)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x-1}{y-4}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{2}{3}$ sont colinéaires

$M(x;y)\in(AB)\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2\\ y-4 & 3\end{vmatrix}=0$

$M(x;y)\in(AB)\Leftrightarrow 3(x-1)-2(y-4)=0$

$M(x;y)\in(AB)\Leftrightarrow y=1{,}5x+2{,}5$

La droite (CD) a $(-\ 3)$ comme ordonnée à l'origine et son coefficient directeur est : $\frac{-3-2}{0-(-4)}=-1{,}25$.

L'équation réduite de la droite (CD) est donc : $y=-1{,}25x-3$.

b. Les droites (AB) et (CD) n'ont pas le même coefficient directeur donc elles sont sécantes.
c. $1{,}5x + 2{,}5 = -1{,}25x - 3 \Leftrightarrow \frac{11}{4}x = -\frac{11}{2} \Leftrightarrow x = -2$
Le point d'intersection des droites (AB) et (CD) a pour abscisse -2.

$$1{,}5 \times (-2) + 2{,}5 = -0{,}5$$

Le point d'intersection des droites (AB) et (CD) a donc pour coordonnées $(-2; -0{,}5)$.

Exercice 8.2 :
a. $x + 1 = -4x + 6 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$ et $y = 2$ donc le point d'intersection des droites d et d' a pour coordonnées $(1\,;2)$.

b. $x + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ et $2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$

$$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 2x + 2 \Leftrightarrow -\frac{7}{3}x = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -1$$

$$y = 2 \times (-1) + 2 = 0$$

Les coordonnées du point d'intersection des droites d et d' sont $(-1; 0)$.

Exercice 8.3
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d, ainsi :

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-10\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

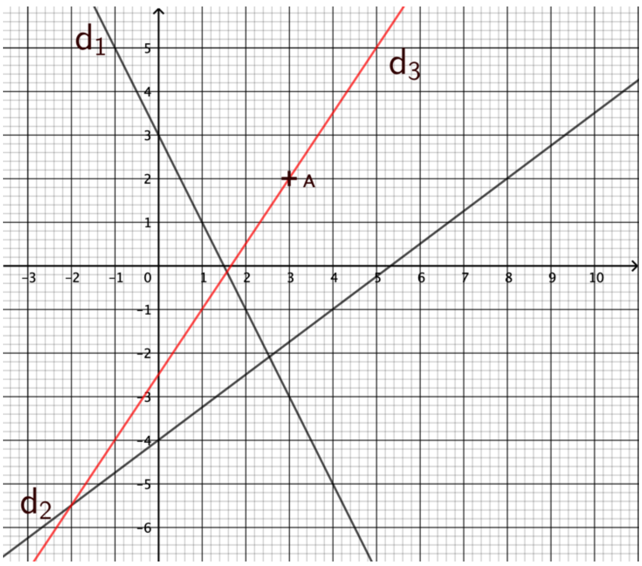
$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-10 & 1\\ y-3 & 2\end{vmatrix} = 0$
$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 2(x - 10) - 1(y - 3) = 0$
$M(x; y) \in d \Leftrightarrow y = 2x - 17$

Exercice 8.4 :

a. $d_1 : y = -2x + 3$

$d_2 : y = \frac{3}{4}x - 4$

b. Voir figure ci-contre.



c. On considère les points A (3 ; 2) et B (7 ; 5).

$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & 4\\ y-2 & 3\end{vmatrix} = 0$

$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow 3(x - 3) - 4(y - 2) = 0$
$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow 3x - 4y - 1 = 0$
$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow y = 0{,}75x - 0{,}25$

d. Détermination par le calcul de l'équation réduite de la droite Δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-7 \\ y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

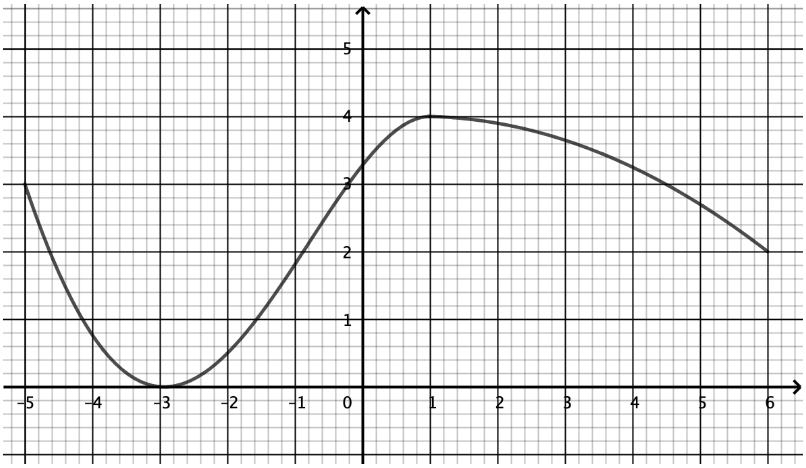
$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-7 & 2 \\ y-5 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow -5(x-7) - 2(y-5) = 0$
$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow -5x - 2y + 45 = 0$
$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow y = -2{,}5x + 22{,}5$

9. Fonctions : tableaux de variation

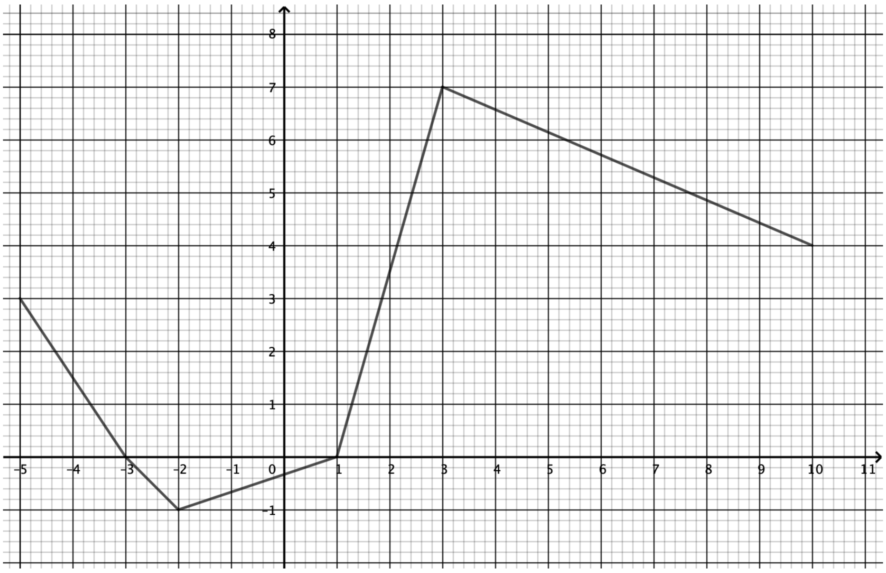
Exercice 9.1

1. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5;-3]$, strictement croissante sur l'intervalle $[-3;1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;6]$.
2. $f(2) > f(5)$ car la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;6]$.
3. « si $x \in [-3\,;\ 6]$, alors $f(x) \in [0;4]$ »
4. Courbe ci-dessous.



Exercice 9.2

a. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5;-2]$, strictement croissante sur l'intervalle $[-2\,;3]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[3\,;10]$.
b. Le maximum de f sur l'intervalle [- 5 ; 10] est 7 et il est atteint pour $x = 3$.
c. Le minimum de f sur l'intervalle [- 5 ; 10] est -1 et il est atteint pour $x = -2$.
d. $f(4) > f(7)$ car la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[3\,;10]$.
e. $f(0) < f(5)$ car $f(0) \in [-1;0]$ et $f(5) \in [4\,;7]$.
f. Faux : « Quand $x \in [-2\,;\ 10]$ alors $f(x) \in [-1;\mathbf{7}]$ »
g. Courbe ci-dessous.



8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11