Corrigés des exercices

1. Développer, factoriser

Exercice 1.1.

$A = (1+2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2 = 4x^2 + 4x + 1$

$B = (2-3x)(2+3x) = 2^2 - (3x)^2 = -9x^2 + 4$

$C = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$D = (1+2x)(1-2x)(1+x) = (1-4x^2)(1+x)$
$D = 1 - 4x^2 + x - 4x^3 = -4x^3 - 4x^2 + x + 1$

$E = (2x+1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 1 = 4x^2 + 4x$

$F = 1 - (1-3x)(1+x) = 1 - (1 - 2x - 3x^2)$
$F = 2x + 3x^2 = 3x^2 + 2x$

Exercice 1.2.

a) $17 - 3(x+3) = 17 - 3x - 9 = -3x + 8$

b) $(3x-2)(2x+5) = 6x^2 + 11x - 10$

c) $(x+8)^2 - 5 = x^2 + 16x + 59$

d) $(2x-1)(4x-5) = 8x^2 - 14x + 5$

Exercice 1.4.

a) $-3x^2 + 6x(x-2) = -3x^2 + 6x^2 - 12x = 3x^2 - 12x$
b) $5(x+3)(x+1) = 5(x^2 + x + 3x + 3) = 5x^2 + 20x + 15$
c) $(2x-1)^2 - x^2 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 = 3x^2 - 4x + 1$
d) $4x(2x-1) - 8x(x^2-5) = 8x^2 - 4x - 8x^3 + 40x = -8x^3 + 8x^2 + 36x$

Exercice 1.5.

$\mathrm{A} = 5x - (3x-5)^2 = 5x - (9x^2 - 30x + 25) = -9x^2 + 35x - 25$
$\mathrm{B} = (3x+6)(5x-2) = 15x^2 + 24x - 12$
$\mathrm{C} = 5x - (3x+5)^2 = 5x - (9x^2 + 30x + 25) = -9x^2 - 25x - 25$
$\mathrm{D} = (3x+6)(5x-2) = 15x^2 + 24x - 12$

Exercice 1.6.

$A = (x-3)(2x+5) - 2(2x+5)$
$A = (2x+5)[x - 3 - 2]$
$A = (2x+5)(x-5)$

$B = (2x+1)(x-3) - (2x+1)$
$B = (2x+1)[x - 3 - 1]$
$B = (2x+1)(x-4)$

$D = (2x+3)(1-x) - (4x+6)$
$D = (2x+3)(1-x) - 2(2x+3)$
$D = (2x+3)[1 - x - 2]$
$D = (2x+3)(-x-1)$

$E = (1+2x)^2 - (2-x)^2$
$E = [(1+2x) + (2-x)][(1+2x) - (2-x)]$
$E = (3+x)(-1+3x)$

$F = 4x^2 - 12x + 9$
$F = (2x-3)^2$

$C = x^2 + 10x + 25$
$C = (x+5)^2$

Exercice 1.7. a) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

b) $9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$

c) $4(x+5)^2 - 7 = \left(2(x+5) - \sqrt{7}\right)\left(2(x+5) + \sqrt{7}\right) = \left(2x + 10 - \sqrt{7}\right)\left(2x + 10 + \sqrt{7}\right)$

d) $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$

e) $-x^2 + 16 = 16 - x^2 = (4-x)(4+x)$

Exercice 1.8. a) $4(x-1)^2-9=(2(x-1)-3)(2(x-1)+3)=(2x-5)(2x+1)$

b) $4-12x+9x^2=(3x-2)^2$ c) $3-4x^2=(\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x)$

d) $9(x+2)^2-1=(3(x+2)-1)(3(x+2)+1)=(3x+5)(3x+7)$

e) $10-9x^2=(\sqrt{10}-3x)(\sqrt{10}+3x)$

Exercice 1.9

$A=(2x+3)(5x-1)-(2x+3)=(2x+3)(5x-1)-(2x+3)\times 1=(2x+3)(5x-2)$

$B=(x-3)(2x+5)-4x^2+25=(x-3)(2x+5)-(2x-5)(2x+5)=(2x+5)(-x+2)$

$C=4x^2+(2x+1)(3x-5)+4x+1=4x^2+4x+1+(2x+1)(3x-5)$
$C=(2x+1)^2+(2x+1)(3x-5)=(2x+1)(5x-4)$

$D=(3x-1)(2x+5)-(3x-1)=(3x-1)((2x+5)-1)=(3x-1)(2x+4)$

Exercice 1.10.

$a=3\,678\,945\,678^2-3\,678\,945\,677\times 3\,678\,945\,679$
On pose $k=3\,678\,945\,678$: $a=k^2-(k-1)(k+1)=k^2-k^2+1=1$

$b=999^2=(1000-1)^2=1000^2-2000+1=998\,001$

$c=1\,002^2=(1000+2)^2=1000^2+4000+4=1\,004\,004$

$d=1005\times 995=(1000+5)(1000-5)=1000^2-25=999\,975$

$e=1{,}97\times 2{,}03=(2-0{,}03)(2+0{,}03)=4-0{,}0009=3{,}9991$

2. Quotients et fractions

Exercice 2.1

$$a=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}=\frac{3}{4}-\frac{4}{9}=\frac{27-16}{36}=\frac{11}{36}\qquad b=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}\qquad c=\frac{3}{\frac{1}{2}}\times\frac{3}{2}=9$$

$$d=5\times\frac{1-\frac{1}{2}}{3}=\frac{5}{6}\qquad e=\frac{14\times 10^2\times 9\times 10^5}{21\times 10^3}=\frac{7\times 2\times 9\times 10^4}{7\times 3}=2\times 3\times 10^4=60\,000$$

Exercice 2.2

$$a=\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{14+12}{21}=\frac{26}{21}\qquad b=\frac{5}{13}-2=\frac{-21}{13}\qquad c=\frac{23}{26}-\frac{12}{39}=\frac{23}{26}-\frac{8}{26}=\frac{15}{26}$$

$$d=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{21}{16}}=\frac{15}{4}\times\frac{16}{21}=\frac{3\times 5\times 4\times 4}{4\times 3\times 7}=\frac{5\times 4}{7}=\frac{20}{7}\qquad e=\frac{4}{35}\times 8=\frac{32}{35}$$

$$f=\frac{-21}{35}\div\frac{3}{10}=\frac{-21}{35}\times\frac{10}{3}=-\frac{7\times 3\times 5\times 2}{7\times 5\times 3}=-2$$

Exercice 2.3

$$a = \frac{42}{75} - \left(-\frac{22}{30}\right) = \frac{14}{25} + \frac{11}{15} = \frac{42+55}{75} = \frac{97}{75} \qquad b = -\frac{1}{25} - 8 = \frac{-1-200}{25} = -\frac{201}{25}$$

$$c = \frac{26}{77} \div \frac{39}{21} = \frac{26}{77} \times \frac{21}{39} = \frac{13 \times 2 \times 3 \times 7}{11 \times 7 \times 3 \times 13} = \frac{2}{11} \qquad d = \frac{1{,}6 \times 10^{-10}}{4 \times 10^{-9}} = \frac{1{,}6}{4 \times 10} = \frac{0{,}4}{10} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$e = \frac{5}{4} - \frac{7}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{40}{32} - \frac{49}{32} = -\frac{9}{32}$$

Exercice 2.4

$$a = \frac{3}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \qquad b = \left(4 + \frac{3}{4}\right)\left[5 - \frac{7}{5} \times (-10)\right] = \frac{19}{4} \times 19 = \frac{361}{4}$$

$$c = -15 \times \frac{7}{25} - \frac{6}{7} \times \frac{14}{9} \times \frac{27}{15} = -\frac{21}{5} - \frac{3 \times 2 \times 2 \times 7 \times 9 \times 3}{7 \times 9 \times 3 \times 5} = -\frac{21}{5} - \frac{3 \times 2 \times 2}{5} = -\frac{33}{5}$$

$$d = \frac{2 \times \frac{3}{4} - 5 \times \frac{7}{4}}{1 + \frac{10}{9} \times \frac{5}{4}} = \frac{-\frac{29}{4}}{\frac{43}{18}} = -\frac{29}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 9}{43} = -\frac{261}{86}$$

Exercice 2.5 $A :\ \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $\quad B :\ \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ $\quad C :\ \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$A = 1 + \frac{4}{2x+1} = \frac{2x+5}{2x+1} \qquad B = 2 - \frac{3}{1-3x} = \frac{2-6x-3}{1-3x} = \frac{-6x-1}{1-3x}$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{3x+1}{x+1} = \frac{x+1-6x-2}{2(x+1)} = \frac{-5x-1}{2(x+1)}$$

Exercice 2.6 **5** $A :\ \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $\quad B :\ \mathbb{R}\backslash\{1\}$ $\quad C :\ \mathbb{R}\backslash\left\{0\,;\,\frac{3}{2}\right\}$

$$A = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1} \qquad B = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$$C = \frac{1}{3x} - \frac{1+x}{2x-3} = \frac{2x-3-3x(1+x)}{3x(2x-3)} = \frac{-3x^2-x-3}{3x(2x-3)}$$

Exercice 2.7

$$x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{5}\right\} : a = \frac{10x^2+15}{25x-5} = \frac{2x^2+3}{5x-1}$$

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} :\ b = \frac{26x^2-39}{13x} = \frac{2x^2-3}{x}$$

$$c = \frac{3x+1}{9x^2+6x+1}$$

Au dénominateur, on reconnaît $(3x+1)^2$ donc l'expression c est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{3}\right\}$:

$$c = \frac{3x+1}{9x^2+6x+1} = \frac{3x+1}{(3x+1)^2} = \frac{1}{3x+1}$$

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\} :\ d = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+x^2+x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)}$$

Exercice 2.8

$$a)\ \frac{4}{5}x-\frac{4}{3}=2x+\frac{1}{7}\Leftrightarrow -\frac{6}{5}x=\frac{31}{21}\ \Leftrightarrow x=-\frac{155}{126}\qquad S=\left\{-\frac{155}{126}\right\}$$

$$b)\ -\frac{8}{3}x+5=\frac{1}{9}x+9\ \Leftrightarrow -\frac{25}{9}x=4\ \Leftrightarrow x=-\frac{36}{25}\qquad S=\left\{-\frac{36}{25}\right\}$$

$$c)\ \left(\frac{1}{3}x+1\right)(3x-4)=\left(x-\frac{1}{5}\right)^2\Leftrightarrow x^2-\frac{4}{3}x+3x-4=x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}\Leftrightarrow \frac{31}{15}x=\frac{101}{25}\Leftrightarrow x=\frac{303}{155}$$

Exercice 2.9

$$a)\ \frac{2}{3}x+11\leq x+\frac{2}{5}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x\leq -\frac{53}{5}\Leftrightarrow x\geq \frac{159}{5}\qquad S=\left[\frac{159}{5};+\infty\right[$$

$$b)\ -\frac{1}{4}x+\frac{1}{9}>-x\ \Leftrightarrow\ \frac{3}{4}x>-\frac{1}{9}\ \Leftrightarrow\ x>-\frac{4}{27}\qquad S=\left]-\frac{4}{27};+\infty\right[$$

$$c)\ x+2\leq \frac{x+1}{4}\Leftrightarrow \frac{3}{4}x\leq -\frac{7}{4}\Leftrightarrow x\leq -\frac{7}{3}\qquad S=\left]-\infty;-\frac{7}{3}\right]$$

Exercice 2.10.

a) $\frac{1}{4}x^2+x\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}x^2+x^2-\frac{1}{3}x=\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{3}x$

b) $\frac{3}{2}\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(x^2-\frac{31}{15}x-\frac{8}{5}\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{31}{10}x-\frac{12}{5}$

c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}+x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=2x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{16}$

d) $4\left(x-\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{3}{7}\right)=4\left(x^2+\frac{2}{7}x-\frac{3}{49}\right)=4x^2+\frac{8}{7}x-\frac{12}{49}$

3. Puissances

Exercice 3.1.

$31\times 10^5\times 122\times 10^6=3{,}1\times 10^6\times 1{,}22\times 10^8=3{,}1\times 1{,}22\times 10^{14}$

La bonne réponse est donc la réponse b.

Exercice 3.2.

$a=8\times 5^2-(3+4)^2+7\times 2^3=200-49+56=207$

$b=(2-9)^2+3\times(-5)^3+2\times 3^2=49-125+18=-58$

$c=-5^4-3\times(-5+2)^3-(7\times 2)^2=-625+3\times 27-196=-740$

$d=(7+13)^3-(9\times 2+12)^2=8000-900=7100$

Exercice 3.3.

$a=31000\times 10^{-4}=3{,}1\qquad b=7{,}2\times 10^3=7200$

$c=0{,}5\times 10^{-2}=0{,}005\qquad d=5\times 10^{-7}\times 2\times 10^9=10\times 10^2=1000$

Exercice 3.4.

$$a = \frac{3^2 \times 7}{7^2 \times 3} = \frac{3}{7} \qquad b = \frac{9 \times 10^2}{3 \times 5^3} = \frac{3 \times 2^2}{5} = \frac{12}{5} \qquad c = \frac{2^4 \times 8^4}{2 \times 16^3} = \frac{2^4 \times 8^4}{2^4 \times 8^3} = 8$$

$$d = \frac{3^5 \times 8^7 \times 6^3}{3^6 \times 12^3 \times 8^4 \times 4^3} = \frac{8^3}{3 \times \underbrace{2^3 \times 4^3}_{8^3}} = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.5.

$$a = 5^2 \times 5^{-3} = 5^{-1} \qquad b = \frac{5^8}{5^{-2}} = 5^{10} \qquad c = (5^2)^{-2} = 5^{-4}$$

$$d = 3 \times 5^4 + 2 \times 5^4 = 5 \times 5^4 = 5^5 \qquad e = \frac{5^{-3} \times 5^4}{5 \times 25^3} = \frac{1}{25^3} = \frac{1}{5^6} = 5^{-6}$$

Exercice 3.6

a. Pour tout entier naturel n, $5^n + 5^{n+1} = 5^n \times 1 + 5^n \times 5 = 5^n \times 6$
donc pour tout entier naturel n, le nombre $5^n + 5^{n+1}$est un multiple de 6.

b. Pour tout entier naturel n, $2^n + 2^{n+3} = 2^n \times 1 + 2^n \times 2^3 = 2^n \times 9$
donc pour tout entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+3}$est un multiple de 9.

Exercice 3.7

$$a = 25 \times 100 \times 5^{-3} = 5^2 \times 5^2 \times 2^2 \times 5^{-3} = 2^2 \times 5 \qquad b = \frac{125 \times 12}{30} = \frac{5^3 \times 2^2 \times 3}{2 \times 3 \times 5} = 2 \times 5^2$$

$$c = 125^2 \times 100^3 = 5^6 \times 5^6 \times 2^6 = 2^6 \times 5^{12}$$

$$d = 0{,}002 \times 0{,}0025 = 2 \times 10^{-3} \times 5^2 \times 10^{-4} = 2 \times 5^2 \times 10^{-7} = 2 \times 5^2 \times 2^{-7} \times 5^{-7} = 2^{-6} \times 5^{-5}$$

$$e = \frac{35^{-1} \times 49}{14} = \frac{5^{-1} \times 7^{-1} \times 7^2}{7 \times 2} = 5^{-1} \times 2^{-1}$$

Exercice 3.8

$$a = 49 \times 21 \times 27 = 7^2 \times 3 \times 7 \times 3^3 = 3^4 \times 7^3 \qquad b = \frac{343 \times 15}{35} = \frac{7^3 \times 3 \times 5}{7 \times 5} = 3 \times 7^2$$

$$c = 49^5 \times 21^3 = 7^{10} \times 3^3 \times 7^3 = 3^3 \times 7^{13} \qquad d = 7000 \times 0{,}049 = 7 \times 10^3 \times 7^2 \times 10^{-3} = 7^3$$

Exercice 3.9

$$a = 14 \times 2^n = 7 \times 2^{n+1} \qquad b = \frac{7^{n+1} \times 2^{2n+3}}{28} = 7^n \times 2^{2n+1}$$

$$c = 49^{n-3} \times 28^3 = 7^{2n-6} \times 2^6 \times 7^3 = 2^6 \times 7^{2n-3}$$

$$d = 14^{n+1} \times 0{,}25^2 = 7^{n+1} \times 2^{n+1} \times (2^{-2})^2 = 2^{n-3} \times 7^{n+1}$$

$$e = \frac{4^{-3} \times 7}{2^{3n}} = \frac{2^{-6} \times 7}{2^{3n}} = 2^{-3n-6} \times 7$$

Exercice 3.10

a) $u = 7 \times 2^{3n+1}, v = -3 \times 2^{5n}, q = 2$ $\quad u \times v = -21 \times 2^{8n+1}$ $\quad \dfrac{u}{v} = -\dfrac{7}{3} \times 2^{-2n+1}$

b) $u = 12 \times 2^{n-1}, v = 3 \times 2^{n}, q = 2$ $\quad u \times v = 9 \times 2^{2n+1}$ $\quad \dfrac{u}{v} = 4 \times 2^{-1} = 2$

c) $u = 10 \times 5^{n}, v = -2 \times 5^{n+1}, q = 5$ $\quad u \times v = -4 \times 5^{2n+2}$ $\quad \dfrac{u}{v} = -1 = -5^{0}$

d) $u = 4 \times 3^{n-1}, v = 3^{n+4}, q = 3$ $\quad u \times v = 4 \times 3^{2n+3}$ $\quad \dfrac{u}{v} = 4 \times 3^{-5}$

4. Racines carrées

Exercice 4.1

$a = \sqrt{300} - \sqrt{12} - \sqrt{27}$
$a = \sqrt{10^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3}$
$a = \sqrt{10^2} \times \sqrt{3} - \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$
$a = 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$b = \sqrt{125} - 15\sqrt{5} + \sqrt{245}$
$b = \sqrt{5^2 \times 5} - 15\sqrt{5} + \sqrt{7^2 \times 5}$
$b = \sqrt{5^2} \times \sqrt{5} - 15\sqrt{5} + \sqrt{7^2} \times \sqrt{5}$
$b = 5\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$
$b = -3\sqrt{5}$

$c = \sqrt{14} \times \sqrt{21} \times \sqrt{6}$
$c = \sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$
$c = (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{7})^2$
$c = 2 \times 3 \times 7$
$c = 42$

$d = \sqrt{63} + 5\sqrt{7} - \sqrt{700}$
$d = \sqrt{3^2 \times 7} + 5\sqrt{7} - \sqrt{10^2 \times 7}$
$d = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - \sqrt{10^2} \times \sqrt{7}$
$d = 3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 10\sqrt{7}$
$d = -2\sqrt{7}$

Exercice 4.2

$A = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$
$A = 2 \times 3$
$A = 6$

$B = 4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}$
$B = 12 \times 5$
$B = 60$

$C = (-\sqrt{5})^2$
$C = 5$

$D = (3\sqrt{2})^2$
$D = 9 \times 2$
$D = 18$

Exercice 4.3

$A + B = 8 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 1$
$A + B = 7 + 4\sqrt{2}$

$A - B = 8 + \sqrt{2} - (3\sqrt{2} - 1)$
$A - B = 8 + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1$
$A - B = 9 - 2\sqrt{2}$

$A \times B = (8 + \sqrt{2}) \times (3\sqrt{2} - 1)$
$A \times B = 24\sqrt{2} - 8 + 6 - \sqrt{2}$
$A \times B = -2 + 23\sqrt{2}$

$B^2 = (3\sqrt{2} - 1)^2$
$B^2 = 18 - 6\sqrt{2} + 1$
$B^2 = 19 - 6\sqrt{2}$

Exercice 4.4

$a = \sqrt{3}\sqrt{12}$
$a = \sqrt{36}$
$a = 6$

$b = \sqrt{5}\sqrt{20}$
$b = \sqrt{100}$
$b = 10$

$c = 2\sqrt{3}\sqrt{12}$
$c = 2\sqrt{36}$
$c = 2 \times 6$
$c = 12$

$d = \sqrt{7^3}$
$d = \sqrt{7^2 \times 7}$
$d = \sqrt{7^2} \times \sqrt{7}$
$d = 7\sqrt{7}$

$e = \sqrt{200}$
$e = \sqrt{100} \times \sqrt{2}$
$e = 10\sqrt{2}$

$f = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}}$
$f = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{3} \times \sqrt{9}}$
$f = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$g = \sqrt{\dfrac{25}{100}}$
$g = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}}$
$g = \dfrac{5}{10}$
$g = \dfrac{1}{2}$

Exercice 4.5

$a = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$
$a = -4\sqrt{7}$

$b = 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{180} + 17\sqrt{5}$
$b = 26\sqrt{5} - \sqrt{36} \times \sqrt{5}$
$b = 26\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$
$b = 20\sqrt{5}$

$c = \sqrt{18} - \sqrt{8} - \sqrt{2}$
$c = \sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{4} \times \sqrt{2} - \sqrt{2}$
$c = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$
$c = 0$

$d = \sqrt{180} - \sqrt{20} + \sqrt{125}$
$d = \sqrt{36} \times \sqrt{5} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{25} \times \sqrt{5}$
$d = 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$
$d = 9\sqrt{5}$

Exercice 4.6

$a = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$
$a = 2 + 2\sqrt{6} + 3$
$a = 5 + 2\sqrt{6}$

$b = \left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)^2$
$b = 20 - 12\sqrt{10} + 18$
$b = 38 - 12\sqrt{10}$

$c = \left(\sqrt{7} - 4\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} + 4\sqrt{5}\right)$
$c = \left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(4\sqrt{5}\right)^2$
$c = 7 - 80$
$c = -73$

$d = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$
$d = 3 - 1$
$d = 2$

Exercice 4.7

$a = \dfrac{24 - \sqrt{8}}{6}$
$a = \dfrac{24 - \sqrt{4} \times \sqrt{2}}{6}$
$a = \dfrac{24 - 2\sqrt{2}}{6}$
$a = 4 - \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$b = \dfrac{35 + \sqrt{50}}{10}$
$b = \dfrac{35 + \sqrt{25} \times \sqrt{2}}{10}$
$b = \dfrac{35 + 5\sqrt{2}}{10}$
$b = \dfrac{5\left(7 + \sqrt{2}\right)}{5 \times 2}$
$b = \dfrac{7 + \sqrt{2}}{2}$

$c = \dfrac{-6 - \sqrt{27}}{-6}$
$c = \dfrac{6 + \sqrt{9} \times \sqrt{3}}{6}$
$c = \dfrac{6 + 3\sqrt{3}}{6}$
$c = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$d = \dfrac{-1 - \sqrt{36}}{-28}$
$d = \dfrac{1 + 6}{28}$
$d = \dfrac{7}{28}$
$d = \dfrac{1}{4}$

Exercice 4.8

$a = \dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}} = \dfrac{\sqrt{9} \times \sqrt{7}}{\sqrt{4} \times \sqrt{7}} = \dfrac{3}{2}$

$b = \dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\dfrac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2$

$c = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$d = \dfrac{2}{\sqrt{3} + 1} = \dfrac{2\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}$
$d = \dfrac{2\left(\sqrt{3} - 1\right)}{3 - 1} = \dfrac{2\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}$
$d = \sqrt{3} - 1$

$e = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 3} = \dfrac{1\left(\sqrt{2} + 3\right)}{\left(\sqrt{2} - 3\right)\left(\sqrt{2} + 3\right)}$
$e = \dfrac{\sqrt{2} + 3}{2 - 9} = \dfrac{\sqrt{2} + 3}{-7}$
$e = \dfrac{-\sqrt{2} - 3}{7}$

$f = \dfrac{3}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{3\left(1 - \sqrt{2}\right)}{\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)}$
$f = \dfrac{3\left(1 - \sqrt{2}\right)}{1 - 2} = \dfrac{3\left(1 - \sqrt{2}\right)}{-1}$
$f = -3\left(1 - \sqrt{2}\right)$

Exercice 4.9

$3x - \sqrt{5} = 7x + \sqrt{5} \Leftrightarrow -4x - \sqrt{5} = \sqrt{5}$
$\Leftrightarrow -4x = 2\sqrt{5}$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{4}$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

$\sqrt{2}x + 3 = 5x + 8 \Leftrightarrow \sqrt{2}x - 5x + 3 = 8$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2} - 5\right)x = 5$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{\sqrt{2} - 5}$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{5\left(\sqrt{2} + 5\right)}{\left(\sqrt{2} - 5\right)\left(\sqrt{2} + 5\right)}$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{25 + 5\sqrt{2}}{2 - 25}$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{25 + 5\sqrt{2}}{23}$

$S = \left\{-\dfrac{25 + 5\sqrt{2}}{23}\right\}$

$\sqrt{2}x + 1 = x + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x - x + 1 = \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)x = \sqrt{2} - 1$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$
$\Leftrightarrow x = 1$
$S = \{1\}$

$2x^2 - 1 = x^2 + 6 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 0$
$\Leftrightarrow (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$
$\Leftrightarrow x - \sqrt{7} = 0 \;$ ou $\; x + \sqrt{7} = 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{7} \;$ ou $\; x = -\sqrt{7}$
$S = \{-\sqrt{7} \,;\, \sqrt{7}\}$

Exercice 4.10. $x \in \left]0 \,;\, +\infty\right[$.

a) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x}$
$f(x) = 2\sqrt{x}$

b) $f(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$
$f(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times x^2}{\sqrt{x}}$
$f(x) = x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}$
$f(x) = x\sqrt{x}(1 + x)$

c) $f(x) = 2x\sqrt{x} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$
$f(x) = 2x\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times x}{\sqrt{x}}$
$f(x) = 2x\sqrt{x} - x\sqrt{x}$
$f(x) = x\sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{12x^2 - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \dfrac{12x\sqrt{x} \times \sqrt{x} - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}(6x\sqrt{x} - x)}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = 6x\sqrt{x} - x$

5. Équations produit

Exercice 5.1 a) $2x^2 = 0 \quad S = \{0\}$

b) $x^2 - 3 = 0 \quad S = \{-\sqrt{3};\, \sqrt{3}\}$

c) $x^2(x + 3) = 0 \quad S = \{-3\,;0\}$

d) $-4x(x^2 + 1) = 0 \quad S = \{0\}$

Exercice 5.2

a) $(x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$
$\boxed{S = \{-1; 3\}}$

b)
$(2x + 1)(1 - x)(3 + x) = 0$
$\Leftrightarrow x = -1/2$ ou $x = 1$ ou $x = -3$
$\boxed{S = \{-3\,;\, -\frac{1}{2}; 1\}}$

c) $3(1 + x)(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$
$\boxed{S = \{-1; 1\}}$

d) $(x + 1)(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 7/2$
$\boxed{S = \left\{-1; \frac{7}{2}\right\}}$

Exercice 5.3

a) $(x + 3)(1 + 2x) - 2(x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow (x + 3)(2x - 1) = 0$
$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \;$ ou $2x - 1 = 0$
$S = \left\{-3; \dfrac{1}{2}\right\}$

b) $(x + 1)(2x + 3) = (x + 1)(2 + 3x)$
$\Leftrightarrow (x + 1)(-x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \;$ ou $-x + 1 = 0$
$S = \{-1; 1\}$

c) $(1 + x)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (1 + x - 3 + 2x)(1 + x + 3 - 2x) = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \;$ ou $-x + 4 = 0$
$S = \left\{\dfrac{2}{3}; 4\right\}$

d) $x(x + 1) = x(2x + 5)$
$\Leftrightarrow x(-x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \;$ ou $-x - 4 = 0$
$S = \{-4; 0\}$

Exercice 5.4

a) $(x-2)(2x+3)+(x-2)(3x+4)=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(5x+7)=0$
$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $5x+7=0$
$S=\{-1{,}4\,;2\}$

b) $(2x-3)(3x+4)-3(2x-3)(2x+7)=0$
$\Leftrightarrow (2x-3)(-3x-17)=0$
$\Leftrightarrow 2x-3=0$ ou $-3x-17=0$
$S=\left\{-\frac{17}{3}\,;\frac{3}{2}\right\}$

c) $(x-5)^2=(x-5)(3x+9)$
$\Leftrightarrow (x-5)(-2x-14)=0$
$\Leftrightarrow x-5=0$ ou $-2x-14=0$
$S=\{-7\,;5\}$

d) $x^2-9=(x+3)(2x+8)$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-3)-(x+3)(2x+8)=0$
$\Leftrightarrow (x+3)(-x-11)=0$

$S=\{-11\,;-3\}$

Exercice 5.4 : a. $S=\{5;-1\}$ b. $S=\{0;6\}$
c. $(2x+5)^2=(3-x)^2 \Leftrightarrow (2x+5)^2-(3-x)^2=0 \Leftrightarrow (3x+2)(x+8)=0$ $S=\left\{-8;-\frac{2}{3}\right\}$

Exercice 5.5
d. $(4x-3)(x+1)+x(4x-3)=0 \Leftrightarrow (4x-3)(2x+1)=0$ $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right\}$

e. $30x^2=12x \Leftrightarrow 30x^2-12x=0 \Leftrightarrow 6x(5x-2)=0$ $S=\left\{0\,;\frac{2}{5}\right\}$
f. $4(x-2)^2+4(x-2)=-1 \Leftrightarrow 4(x-2)^2+4(x-2)+1=0 \Leftrightarrow (2(x-2)+1)^2=0$
$\Leftrightarrow (2x-3)^2=0$ $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Exercice 5.6
a. $-4x^2+25=0 \Leftrightarrow (5-2x)(5+2x)=0$ $S=\{-2{,}5\,;2{,}5\}$

b. $4x^2=8x \Leftrightarrow 4x^2-8x=0 \Leftrightarrow 4x(x-2)=0$ $S=\{0;2\}$

c.$(2x+1)^2=(2x-4)(2x+4) \Leftrightarrow 4x+1=-16 \Leftrightarrow x=-\frac{17}{4}$ $S=\left\{-\frac{17}{4}\right\}$

Exercice 5.7
d. $3x^2+3x=(x+1)^2 \Leftrightarrow 3x(x+1)-(x+1)^2=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-1)=0$ $S=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

e. $(x+3)(x-3)-x(2x-6)+(x-3)^2=0 \Leftrightarrow (x-3)\times 0=0$ $S=\mathbb{R}$

f. $4x^3-x=0=x(2x-1)(2x+1)=0$ $S=\left\{-\frac{1}{2};0\,;\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 5.8 : $4x-8=x^2-4 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$
donc $y=4\times 2-8=0$
Les coordonnées du point commun à la droite et à la parabole d'équation sont (2 ; 0).

Exercice 5.9 : $x^2+5=x^2-4x+3 \Leftrightarrow 4x=-2 \Leftrightarrow x=-0{,}5$
donc $y=(-0{,}5)^2+5=5{,}25$
Les coordonnées du point d'intersection des deux paraboles sont $(-0{,}5\,;5{,}25)$.

Exercice 5.10 : $10x-5=4x^3+4x^2+11x-5 \Leftrightarrow 4x^3+4x^2+x=0 \Leftrightarrow x(2x+1)^2=0$
Les abscisses des points d'intersection sont donc 0 et $-0{,}5$
et les ordonnées correspondantes sont donc – 5 et – 10.
Les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la courbe sont $(0;-5)$ et $(-0{,}5\,;-10)$.

6. Équations quotient

Exercice 6.1

a) $\frac{3}{2x}=-2$

Ici 0 est valeur interdite. Pour tous réels x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\frac{3}{2x}=-2 \Leftrightarrow \frac{3}{2x}+2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3+4x}{2x}=0$$

$$\Leftrightarrow 3+4x=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}}$$

b) $\frac{3x+1}{x-3}=1$

Ici 3 est valeur interdite.

Pour tous réels x de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

$$\frac{3x+1}{x-3}=1 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+4}{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2$$

$$\boxed{S=\{-2\}}$$

c) $\frac{-x+4}{2x+1}=2$

Ici $-\frac{1}{2}$ est valeur interdite.

Pour tous réels x de $\mathbb{R}\{-1/2\}$

$$\frac{-x+4}{2x+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+4}{2x+1}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+4-4x-2}{2x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 2-5x=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{2}{5}\right\}}$$

d) $\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{x}$

Ici $-1/2$ et 0 sont les valeurs interdites.

Pour tous réels x de $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2};0\}$:

$$\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1}-\frac{1}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2x-1}{x(2x+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow -x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

$$\boxed{S=\{-1\}}$$

Exercice 6.2. a) On résout dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $S=\emptyset$

b) On résout dans $\mathbb{R}\backslash\{-3;-2\}$ et $S=\left\{-\frac{19}{5};0\right\}$

c) On résout dans $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ et $S=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Exercice 6.3. a) On résout dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $S=\emptyset$

b) On résout dans $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3}\right\}$ et $S=\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

c) On résout dans $\mathbb{R}$ et $S=\left\{-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

Exercice 6.4. a) $f(x)=\frac{x^2-5}{(x-2)^2}$ $\quad\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$ $\quad S=\left\{\frac{9}{4}\right\}$

b) $f(x)=\frac{4}{(2x-5)^2}$ $\quad\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{2{,}5\}$ $\quad S=\left\{\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right\}$

c) $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x+2)}$ $\quad\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-2\,;1\}$ $\quad S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

7. Inéquations, tableaux de signes

Exercice 7.1

a) $2x+\frac{1}{3}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{6}$ $\quad S=\left[-\frac{1}{6};+\infty\right[$

b) $-\frac{2}{3}x-\frac{5}{2}<0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow x>-\frac{15}{4}$ $\quad S=\left]-\frac{15}{4};+\infty\right[$

c) $-x+\frac{5}{6}>0 \Leftrightarrow -x>-\frac{5}{6} \Leftrightarrow x<\frac{5}{6}$ $\quad S=\left]-\infty;\frac{5}{6}\right[$

Exercice 7.2. a) $S=\left]-\infty\,;-\frac{3}{4}\right]$ b) $S=\left]-\infty\,;\,\frac{75}{24}\right[$ c) $-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$ $\quad S=]-\infty;0]$

Exercice 7.3

a) $f(x)=1-4x$

x	$-\infty$		$0{,}25$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

b) $f(x)=-x+\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

c) $f(x)=\frac{1}{3}x+2$

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

d) $f(x)=2-\frac{3}{2}x$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

e) $f(x)=4$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

f) $f(x)=x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

g) $f(x)=-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

h) $f(x)=x+1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 7.4

a) $f(x)=(1+x)(2-3x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $f(x)=(1+x)(1-x)(3+2x)$

x	$-\infty$		$-1{,}5$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$3+2x$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $f(x)=-2(2x+1)(1-4x)$

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$0{,}25$		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 7.5

a) $f(x) = \frac{1+4x}{1-x}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$1+4x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

b) $f(x) = \frac{-2}{x+5}$

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	

c) $f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(1-2x)}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Exercice 7.6 : Dans chaque cas, faire un tableau de signe pour résoudre l'inéquation.

a) $S = \left]-\frac{1}{2}; 1\right[$ b) $S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty[$ c) $S = \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$

Exercice 7.7 : Dans chaque cas, faire un tableau de signe pour résoudre l'inéquation.
Dans les tableaux, penser à mettre une double-barre sous les valeurs interdites.

a) $S = \left[-\frac{1}{4}; 2\right[$ b) $S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ c) 0 $S = \left]-1; \frac{1}{5}\right] \cup]1; +\infty[$

Exercice 7.8

1) Une tablette est vendue 220 € donc la recette pour x tablettes produites et vendues est $\boxed{R(x) = 220x.}$

2) a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 50]$,
$B(x) = R(x) - C(x) = 220x - (-x^2 + 200x + 1056) = x^2 + 20x - 1056.$

$$\boxed{B(x) = x^2 + 20x - 1056}$$

b) Pour tout réel *x* de l'intervalle $[0 ; 50]$,
$(x + 44)(x - 24) = x^2 + 20x - 1056 = B(x)$

$$\boxed{B(x) = (x + 44)(x - 24)}$$

c) $B(x)$ est sous forme factorisée chaque facteur est l'expression d'une fonction affine.
$x + 44 = 0 \Leftrightarrow x = -44$ et coefficient directeur strictement positif.
$x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 24$ et coefficient directeur strictement positif.

x	0		24		50
$x + 44$		+		+	
$x - 24$		-	0	+	
$B(x)$		-	0	+	

d) $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]24; 50]$

Pour réaliser un bénéfice, l'entreprise doit fabriquer et vendre au minimum 25 tablettes.

Exercice 7.9

a) $x^2(x+3) \geq 0$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$S = [-3\,;\,+\infty[$

b) $-4x(x^2+1) > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-4x$		$+$		$-$	
x^2+1		$+$		$+$	
$-4x(x^2+1)$		$+$	0	$-$	

$S =]-\infty\,;0[$

c) $(x-1)^2(x-1) < 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-1[$

Exercice 7.10 :

$a)$ $(x+1)(2-x) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = [-1\,;2]$

$b)$ $\dfrac{-x^2}{x+1} > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

$S =]-\infty\,;\,-1[$

$c)$ $(x+1)^2 + 2 > 0$

Pour tout réel x, on a $(x+1)^2 \geq 0$ donc : $S = \mathbb{R}$.

$d)$ $\frac{2}{x+3} > \frac{x}{x+3} \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+3} > 0$

$S =]-3\,;2[$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2-x}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

8. Vecteurs : norme, distance entre deux points, déterminant

Exercice 8.1

a) Notons $M(x; y)$, on a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2+1 \\ -2-5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux si et seulement si les deux vecteurs ont les même coordonnées.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-1 \\ y-2=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$$

On en déduit donc que $M(2; -5)$.

Notons $N(x; y)$ on a alors $\overrightarrow{BN}(x+1; y-5)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux si et seulement si les deux vecteurs ont les même coordonnées.

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -\dfrac{5}{3} \\ y-5 = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right)$.

Notons $P(x; y)$ on a alors $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix} 3-x \\ 2-y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} -1-x \\ 5-y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PC}\begin{pmatrix} -2-x \\ -2-y \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\begin{pmatrix} -3x \\ -3y+5 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ est le vecteur nul si et seulement si ses coordonnées sont nulles.

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ -3y+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que $P\left(0; \frac{5}{3}\right)$.On en déduit donc que $P\left(0; \frac{5}{3}\right)$.

b) Comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$, le quadrilatère $AMCB$ est un parallélogramme.
Comme $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, le quadrilatère $BNCA$ est un trapèze.

Exercice 8.2

a. $I\left(\frac{3+16}{2}; \frac{4+9}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{19}{2}; \frac{13}{2}\right)$.

b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{26}$

$\vec{u}+3\vec{v}\begin{pmatrix} 3+3\times(-1) \\ 2+3\times 5 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u}+3\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 17 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}+3\vec{v}\| = 17$.

c. Notons $C(x; y)$ dans ce cas $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x-16 \\ y-9 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BC} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x-16=3 \\ y-9=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=11 \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de C sont $C(19; 11)$.
d. $Det(\vec{u}, \vec{v}) = 3\times 5 - 2\times(-1) = 17 \neq 0$
donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 8.3

a. $\overrightarrow{AK}\binom{3}{2}$ donc $AK = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

b. Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+7}{2}\,;\,\frac{1+5}{2}\right)$ c'est-à-dire $(4\,;3)$, donc K est le milieu de $[AC]$.

c. K est le milieu de $[AC]$ donc $CK = AK$.

De plus, $BK = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$ donc $BK = AK$.

Finalement, $CK = AK$ et $BK = AK$ donc $AK = BK = CK$
donc le point K est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 8.4 :

a. $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + 3\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

b. Pour démontrer que C est le milieu de $[MN]$, montrons que : $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CM}$.

$$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

On en déduit que : $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CM}$, donc C est le milieu de $[MN]$.

Exercice 8.5

On a : $\overrightarrow{AB}\binom{2}{6}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{5}{15}$

$det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 2 \times 15 - 5 \times 6 = 30 - 30 = 0$

Comme $det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 8.6

a. $\overrightarrow{AB}\binom{5}{11}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{7}{9}$ donc $\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC}\right) = 5 \times 9 - 11 \times 7 = -32 \neq 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires

donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Notons $D(x\,;13)$, on a : $\overrightarrow{AD}\binom{x-3}{17}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{5}{11}$.

D appartient à la droite $(AB) \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow 11x - 33 - 85 = 0$

$\Leftrightarrow 11x = 118 \Leftrightarrow x = \dfrac{118}{11}$

On en déduit que D a pour abscisse $\dfrac{118}{11}$.

9. Équation réduite de droites, point d'intersection de deux droites

Dans tous les exercices suivants, le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 9.1 : Soient les points $A(1;4)$, $B(3;7)$, $C(-4;2)$ et $D(0\ ;\ -3)$.

a. $M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-4 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow 3(x-1) - 2(y-4) = 0$

$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow y = 1{,}5x + 2{,}5$

La droite (CD) a $(-\ 3)$ comme ordonnée à l'origine et son coefficient directeur est : $\frac{-3-2}{0-(-4)} = -1{,}25$.
L'équation réduite de la droite (CD) est donc : $y = -1{,}25x - 3$.

b. Les droites (AB) et (CD) n'ont pas le même coefficient directeur donc elles sont sécantes.

c. $1{,}5x + 2{,}5 = -1{,}25x - 3 \Leftrightarrow \frac{11}{4}x = -\frac{11}{2} \Leftrightarrow x = -2$

Le point d'intersection des droites (AB) et (CD) a pour abscisse -2.

$$1{,}5 \times (-2) + 2{,}5 = -0{,}5$$

Le point d'intersection des droites (AB) et (CD) a donc pour coordonnées $(-2;-0{,}5)$.

Exercice 9.2 :

a. $x + 1 = -4x + 6 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$ et $y = 2$ donc le point d'intersection des droites d et d' a pour coordonnées $(1\ ;2)$.

b. $x + 3y + 1 = 0 \ \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ et $2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$

$$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 2x + 2 \Leftrightarrow -\frac{7}{3}x = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -1$$

$$y = 2 \times (-1) + 2 = 0$$

Les coordonnées du point d'intersection des droites d et d' sont $(-1;0)$.

c. En multipliant tous les coefficient de l'équation $x + 3y + 1 = 0$ par 3 on obtient $3x + 9y + 3 = 0$ donc les droites d et d' sont confondues.

Exercice 9.3

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d, ainsi :

$M(x;y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-10 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$M(x;y) \in d \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-10 & 1 \\ y-3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$M(x;y) \in d \Leftrightarrow 2(x-10) - 1(y-3) = 0$

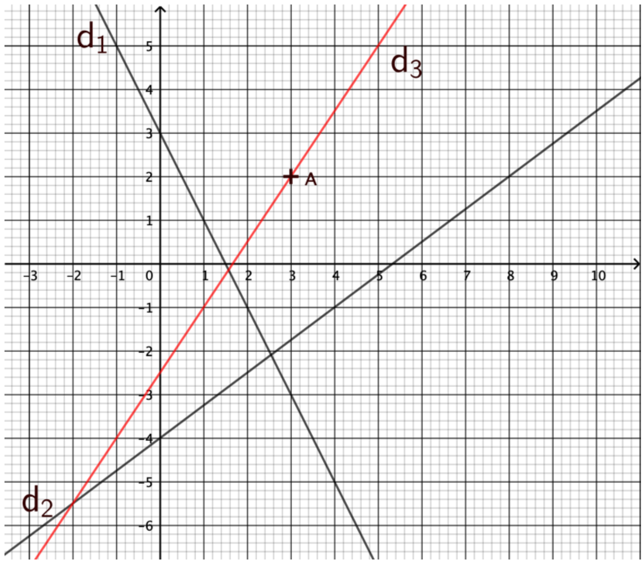
$M(x;y) \in d \Leftrightarrow y = 2x - 17$

Exercice 9.4 :

a. $d_1 : y = -2x + 3$

$d_2 : y = \frac{3}{4}x - 4$

b. Voir figure ci-contre.



c. On considère les points A (3 ; 2) et B (7 ; 5).

$$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow 3(x-3) - 4(y-2) = 0$$
$$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$
$$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow y = 0{,}75x - 0{,}25$$

d. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite Δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-7 \\ y-5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

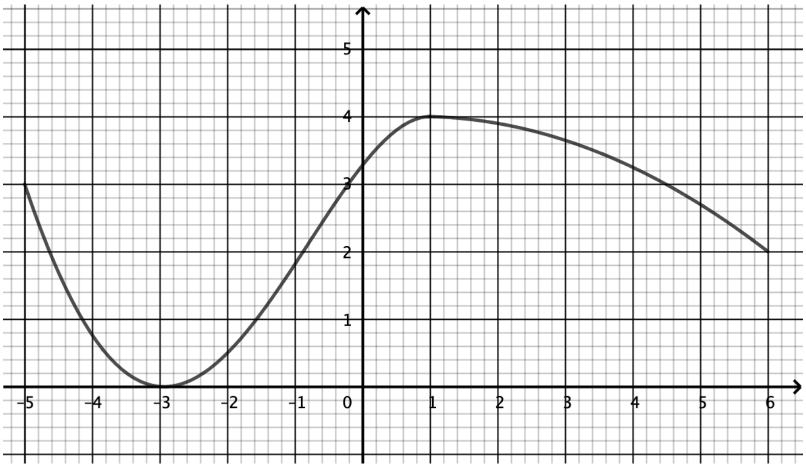
$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-7 & 2 \\ y-5 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow -5(x-7) - 2(y-5) = 0$$
$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow -5x - 2y + 45 = 0$$
$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow y = -2{,}5x + 22{,}5$$

10. Fonctions : tableaux de variation

Exercice 10.1

1. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5; -3]$, strictement croissante sur l'intervalle $[-3; 1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 6]$.
2. $f(2) > f(5)$ car la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 6]$.
3. « si $x \in [-3\ ;\ 6]$, alors $f(x) \in [0; 4]$ »
4. Courbe ci-dessous.



Exercice 10.2

a. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5; -2]$, strictement croissante sur l'intervalle $[-2\,; 3]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[3\,; 10]$.

b. Le maximum de f sur l'intervalle [- 5 ; 10] est 7 et il est atteint pour $x = 3$.

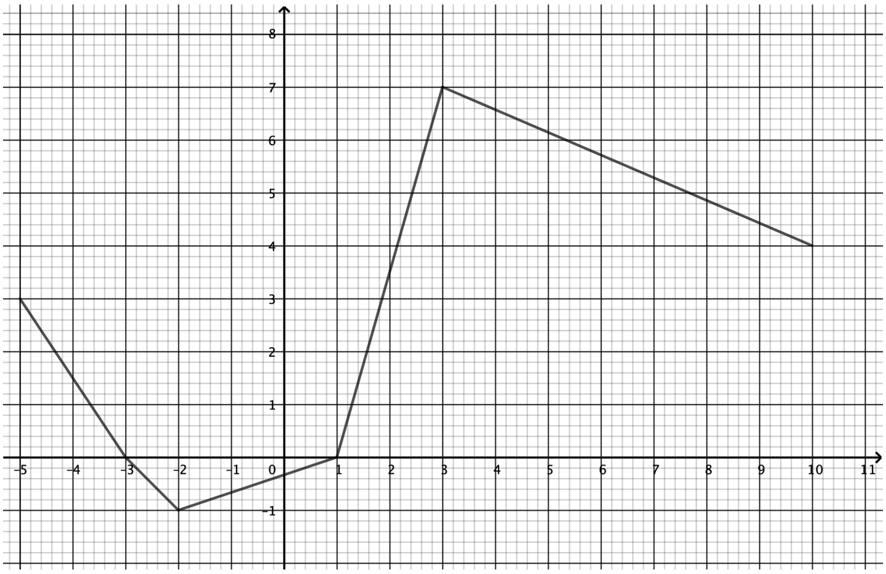
c. Le minimum de f sur l'intervalle [- 5 ; 10] est -1 et il est atteint pour $x = -2$.

d. $f(4) > f(7)$ car la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[3\,; 10]$.

e. $f(0) < f(5)$ car $f(0) \in [-1; 0]$ et $f(5) \in [4\,; 7]$.

f. Faux : « Quand $x \in [-\,2\ ;\ 10]$ alors $f(x) \in [-1; \mathbf{7}]$ »

g. Courbe ci-dessous.



Exercice 10.3.

a. $3(x-2)^2 + 8 = 3(x^2 - 4x + 4) + 8 = 3x^2 - 12x + 12 + 8 = 3x^2 - 12x + 20 = f(x)$

b. $f(x) - 8 = 3(x-2)^2$, donc pour tout réel x, $f(x) - 8 \geq 0$
De plus, $f(2) = 8$, donc f admet 8 comme minimum atteint en $x = 2$.